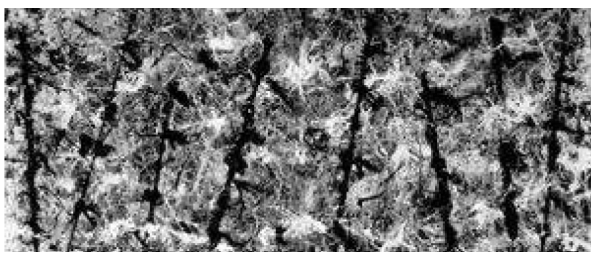
# نقش فراکتال‌ها در هندسه، ریاضیات و ارتباط آن با نقوش اسلامی در ابنیه‌ها و مساجد ایران

میثم میریان*

**فراک. تال**
**تلفظ: Frak.t'l**
**ریشه: از زبان فارسی بمعنی شکسته شده، ناهموار.**
**اولین سال کاربرد: ۱۹۷۵.م**
**(کنار هم چیده شدن اشکال نامنظم را در کنار هم، فراکتال می‌گویند.)**
**منبع: Merriam-Webster**

تاریخ‌نگاران، سالروز تولد بحث فراکتالیسم را حدود سال ۱۹۶۰ میلادی ارزیابی می‌کنند. آنها معتقدند که هندسه فراکتال درنتیجه بررسی‌های آقای مندلبروت، در دهه‌های ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ ایجاد شد، ولی به نظر می‌رسد جای پای فراکتال را می‌توان در نقاشی‌های جکسون پولاک[۱] که سال ها قبل از مندلبروت می‌زیست، مشاهده کرد. پولاک در یک شب طولانی ماه مارس، مستانه و در آستانه خودکشی، شالوده یکی از شاهکارهای خویش «قطب های آبی: شماره ۱۱، سال ۱۹۵۲» را بنیان گذاشت. او بوم بزرگی را کف انبارش فرش کرد و با یک تکه چوب، رنگی معمولی از یک قوطی کهنه روی بوم چکاند. این نخستین باری نبود که هنرمند یک نقاشی را قطره قطره روی بوم می‌ریخت. پولاک برخلاف خطوط شکسته‌ای که تماس متعارف قلم مو با بوم ایجاد می‌کند، تکنیکی ابداع کرد که در آن جریان ثابتی از رنگ روی بوم‌های افقی ریخته می‌شود تا خطوط پیوسته منحصر به فردی پدید آورد. در دوره پولاک، چنین پنداشته می‌شد که طبیعت بی‌نظم است و اساساً تصادفی عمل می‌کند.[۲]



* کارشناس ارشد پژوهش هنر، دانشکده هنر و معماری

پولاک کاری کرد که کمتر هنرمند آمریکایی دیگری می‌تواند به آن دست یابد. او نشان داد که چگونه یک نقاش انتزاعی می‌تواند بوم‌های زیبا، ژرف، معماگونه و جذاب را با شعر و معنا درآمیزد.[۳]

**خودهمانندی در اشکال هندسی:**

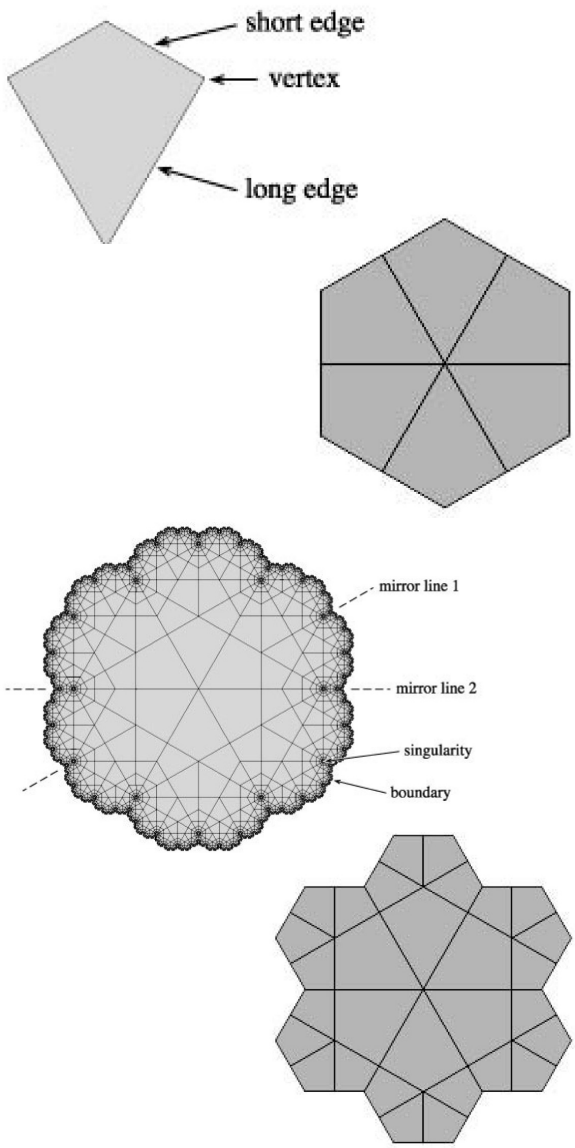
فراکتال ها همانند (خودمتشابه) هستند، بدین معنی که: یک فراکتال در هر اندازه‌ای و با هر مقیاسی، مشابه مقیاس های دیگر به نظر می‌رسد. (کل شکل از اجزایی مشابه شکل اول تشکیل شده است.) به این خاصیت، خودهمانندی می‌گویند. مثلاً در مثلث سرپینسکی، مثلث بزرگ از مجموعه مثلث های همسان به وجود آمده است. این یکی از خصوصیات زیبای فراکتال ها است که همزمان از سوی طبیعت و فناوری به کار گرفته شده است

**آرایش تکرارشونده:**

فراکتال ها اغلب با مراحل تکراری ایجاد می‌شوند. برای ساخت فراکتال یک شکل هندسی مثل یک خط یا مثلث را درنظر بگیرید و روی شکل موردنظر عملیاتی انجام دهید، حال شکلی پیچیده‌تر از شکل اولیه دارید. همان عملیات را روی شکل جدید انجام دهید. این بار شکلی پیچیده‌تر از قبل دارید. باز همان عملیات را تکرار کنید تا الی آخر... به نظر می‌رسد می‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد. اما هر عملیات تکرارشونده روی اشکال، منجر به پیدایش فراکتال‌ها نمی‌شود. مثلاً یک خط را بخش بخش کنید و تا بی‌نهایت این کار را ادامه دهید، یک فراکتال ایجاد نخواهد شد.در ادامه، مراحل تکرار در یک فراکتال را بررسی می‌کنیم: بخشی از یک خط را درنظر بگیرید و یک سوم میانی آن را خارج سازید. آنچه باقی مانده یک خط است با یک فضای خالی میانی. این کار را تکرار کنید، یعنی یک سوم میانی بخش های باقی مانده خط را خارج سازید. تصور کنید این کار را تا بی‌نهایت انجام می‌دهید. آنچه حاصل می‌شود فراکتال معروفی به نام «غبار کانتور» است.

آشنایی با هندسه فراکتال[۴] و کاربردهای آن در هندسه اقلیدسی

با کمی دقت در اطراف خود متوجه می‌شویم پدیده‌هایی وجود دارند که به علت نامنظم بودن شکلشان، آنها را نمی توان با هندسه رایج (هندسه اقلیدسی) به طور دقیق توصیف و اندازه‌گیری نمود.برای مثال می‌توان سطح قاره‌ها، صفحات پوسته زمین، کوه ها، دریاها، توپوگرافی مناطق، ترک‌های مناطق رسی و خردشدگی یک کانی را نام برد. این هندسه غیررایج و غیرمعمول، برای محاسبه پدیده‌هایی که دارای ابعاد ناصحیح و اشکال نامنظم و بی‌قاعده هستند، به کار گرفته می‌شود. بنابراین هندسه فراکتال، توصیف فراکتال و توصیف‌گر طبیعت است؛ آن طوری که طبیعت اعمال می‌کند و نه به گونه‌ای که بشر می‌خواهد و این می‌تواند مزیت بزرگی برای این شاخه از ریاضیات باشد.



## برخال، واژه فارسی فراکتال:

برخال‌ها،[5] ساختارهایی‌اند که خود را در مقیاس کوچکتر تکرار می‌کنند. نشان دادن این ساختارها در قالب نگارین (گرافیکی) گاه اشکال نامنظم، نغز و پیچیده‌ای را با فرمول های ساده ریاضی تولید می‌کند. برخال ها از سال ۱۹۸۰ به بعد موردنگرش واقع شده و هندسه نوینی به نام هندسه برخالی را پدید آورده‌اند. افزون بر اهمیت نظری، از این هندسه به عنوان وسیله‌ای برای الگوبندی پدیده‌های پیچیده استفاده می‌شود. نظریه‌پرداز اصلی هندسه برخالی بنویت مندل بروت[6] بود. واژه برخال از دوپاره برخ و ال ساخته شده است. برخ واژه فارسی برای کسر[7] است و پسوندال، پسوندی به معنای، مرتبط با، است.ویژگی اصلی برخال ها، تکرار متوالی یک اصل است. برخلاف برخال های ریاضی، در بسیاری ازموارد قانون حاکم بر ساخته شدن برخال های طبیعی برای ما مشخص نیست، پس ما نمی‌توانیم به سادگی برخال های ریاضی، بعد برخالی آنها را به دست آوریم.

## الگوهای رویش برخالی:

پدیده‌های رویش درختوار در پیمانه‌های (مقیاس های) کوچک تا بزرگ در طبیعت دیده می‌شوند. رویش بلورها در سنگ های آذرین، رسوب گذاری الکتروشیمیایی، شبکه آبراه‌ها و رودخانه‌ها، رویش توده باکتری ها نمونه‌هایی از پدیده‌های رشد در طبیعت هستند. پرسش این است که چگونه می‌توان این پدیده‌های رویش را الگوبندی کرد؟ رویش درختوار با مفهوم برخال در پیوند است. ویتن و سندر[8] برای نخستین بار، الگوی جمع شدن با پراکندگی محدود[9] که به طور اختصار DLA نامیده شد را ارائه دادند. این الگو دارای دو بخش اصلی هسته اولیه و پیمایشگرهای کنزه‌ای است. در این الگو یک پیمایشکر کنزه‌ای آنقدر در یک فضای محدود حرکت می‌کند تا به نزدیکی هسته اولیه برسد و به آن می‌چسبد. در این زمان یک پیمایشکر کنزه‌ای دیگر در حاشیه فضای محدود رها می‌شود و روند بالا دوباره تکرار می‌گردد. تکرار این فرایند بسیار ساده باعث تولید یک موجود درختواره می‌گردد که خیلی شبیه پدیده‌های رویش طبیعی است. الگوی جمع شدن با پراکندگی محدود به این معنی است که پس از اینکه ذره به ذره‌های پیشین چسبید، هرگونه حرکت بعدی جهت نظم‌گیری با ذرات دیگر اجازه داده نمی‌شود.

## فراکتال چیست؟

فراکتال یک شکل پیچیده هندسی است که از بی‌نهایت قطعه کوچکتر و مشابه شکل اصلی تشکیل شده باشد. ذکر یک مثال می‌تواند شما را با ایده و فلسفه اساسی فراکتال‌ها بیشتر آشنا کند. فرض کنید یک مثلث متساوی‌الاضلاع را پیش روی خود دارید. اگر توسط سه خط نقاط میانی سه ضلع مثلث را به هم متصل کنید حاصل یک مثلث دیگر خواهد بود که در قلب مثلث اصلی جا دارد. در این حال دقت کنید که مثلث اصلی خود به چهارشکل کوچکتر تقسیم شده است. این عمل را می‌توان روی هر یک از چهار مثلث فرعی تا بی‌نهایت تکرار کرد. فلسفه اولیه اختراع فراکتال‌ها همین بوده است. اصطلاح فراکتال نخستین بار در سال ۱۹۷۵ توسط ریاضی‌دان خلاق بنویت مندل بروت برای تشریح گروهی از اشکال که به طور نامنظم الگویی را نمایش می‌دهند، انتخاب گردید. کارشناسان رایانه (مانند گرافیست‌های رایانه‌ای) بسیاری از اوقات از فراکتال‌ها در تصاویر شبه‌طبیعی مانند مناظر، ابرها، جنگل‌ها و سواحل قاره‌ای و صخره‌های کنار ساحل یا بافت‌های دیگری که دارای الگوی تکرارشونده معینی هستند استفاده می‌کنند. اما با این حال خود فراکتال‌ها به اندازه کافی زیبا هستند به گونه‌ای که می‌توانند مستقلاً به عنوان یک اثر هنری نمایش داده شوند. از خصوصیات بارز فراکتال‌ها این است که هر قطعه‌ای از اجزای آن که بزرگ شود[10] مانند کل آن است! هر جزء از یک فراکتال خود فراکتال دیگری است که می‌توان آن را تا بی‌نهایت به اجزای کوچک‌تر تقسیم کرد. از ویژگی‌های دیگر فراکتال‌ها این است که دارای محیط محدودی هستند اما نمی‌توان مساحت آنها را اندازه گرفت چون این کار بستگی به آن دارد که کوچکترین جزء این مجموعه را در چه ابعاد و اندازه‌ای تصور کنیم.

ساختارهای ریاضی مشهوری وجود دارند که جزو دسته فراکتال‌ها هستند. از آن جمله می‌توان «مثلث Sierpinski»، «دانه‌های برف Koch»، «منحنی Peano»، «مجموعه Mandelbrot» و "Lorenz Attractor" را نام برد.. رابطه میان منحنی Lorenz و علم هواشناسی در همین نکته ظریف اخیر نهفته است. مندل بروت در توضیح خود اضافه می‌کند: «... بنابراین قطعه قطعه شدن[11] و تقسیم شدن مجدد به قطعات کوچک‌تر[12] در این پدیده کاملاً محسوس است و از سوی دیگر عبارت Fractus به معنی بی‌نظمی نیز هست» Chaos (به معنی بی‌نظمی). در فلسفه مدرن نیز بحثی به همین نام (Chaos) وجود دارد که با کلیت «نظم در بی‌نظمی» مطرح می‌شود. مندل بروت معتقد است ساختار طبیعت یک هندسه فراکتالی دارد.

## ریاضیات فراکتال‌ها

فراکتال‌ها ابعادی کسری دارند. درک این موضوع در وهله اول ممکن است کمی بغرنج به نظر برسد ولی درواقع موضوع ساده است کافی است مفهوم بعد را تعریف کنیم به این صورت که: «هنگامی می‌گوییم یک شکل معین n بعدی است که اگر اجزای آن شکل را K برابر کنیم خود شکل W برابر شود به طوری که داشته باشیم $\frac{\log W}{\log K} = n$ مثلاً وقتی که طول یک خط را دوبرابر کنیم آن خط هم (به عنوان یک شکل هندسی) دوبرابر می‌شود پس خط یک شکل یک بعدی است اما وقتی اضلاع یک مربع را دوبرابر می‌کنیم خود شکل چهاربرابر می‌شود

بنابراین مربع یک شکل دوبعدی است. در فراکتال‌ها هم بعد همین‌گونه تعریف می‌شود. مثلاً منحنی «دانه‌های برف» یکی از فراکتال‌ها است: خطی به طول سه سانتیمتر را درنظر بگیرید (---) اکنون این خط را با شکلی به صورت (-^-) عوض کنید که در آن هر یک از چهار قسمت شکل جدید برابر یک سانتیمتر باشد. اکنون اجزای حاصل چهاربرابر شکل قبلی خواهد بود چون به جای هر جزء سه سانتیمتری از شکل جدید می‌توانید یک منحنی قدیمی «دانه‌برفی» قرار دهید. بنابراین منحنی دانه برف یک فراکتال ۱/۲۶ بعدی است![۱۳] $\frac{\log 4}{\log 3}$

## فراکتال‌ها و مقیاس‌ها

یک نوع خاص از سیستم‌های Chaotic که به نام Strange Attractors مشهور است، خانواده مهمی از فراکتال‌ها را معرفی می‌کند. ازجمله منحنی Lorenz که پیش تر از آن گفتیم. از میان انواع فراکتال‌ها خانواده «مجموعه مندل بروت» مشهورتر است که در آن معادله ریاضی $Z = Z \wedge 2 + C$ (در فضای اعداد مختلط) به کار می‌رود و C عددی است که بخش موهومی آن بین ۱.۵j- و ۵.۱ j + و بخش حقیقی آن بین ۲- و ۱+ است. جواب این معادله پس از حل دوباره به جای عدد C قرار می‌گیرد و از تکرار حل این معادله نقاطی به دست می‌آیند که شکل زیبا و پیچیده «مجموعه مندل بروت» را می‌سازند. با تغییر دادن شکل معادله فوق الذکر اشکال زیبای دیگری به دست می‌آیند مثلاً اگر در معادله $Z = Z \wedge 2 + C$ نقش C و Z را عوض کنیم (C ثابت و Z متغیر) به نوع دیگری از فراکتال‌ها می‌رسیم که «مجموعه جولیا»[۱۴] نام دارند. ترکیبات متنوعی از این معادلات را می‌توان ساخت و حل کرد و حاصل را ترسیم نمود.

برخی از اصطلاحات ریاضی در هندسه فراکتال‌ها که می‌تواند شما را در جست وجوی تحقیقاتی درمورد فراکتال‌ها کمک کند از این قرارند: «ریاضیات اعداد مختلط»، «معادلات logistic»، «ثابت Feigenbaum»، «توابع تکرار» «L_Systems»، (Iteration Function)، «فراکتال‌های لیاپانوف». عنوان‌های جالب دیگری نیز مانند: «رشته‌کوه‌های فراکتالی»، «موسیقی فراکتالی» و «ابرهای پلاسما» وجود دارند.

## نظریه فراکتال در سیستم های پویا...

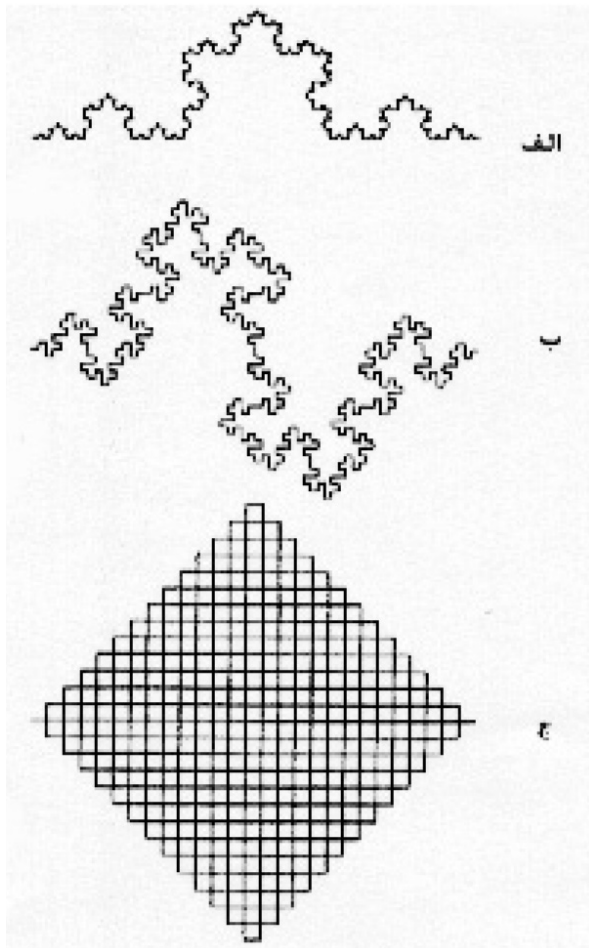
درک رمز و رازهای چگونگی وقوع رشد، توسعه و تحول در سیستم‌های سازمانمند و بغرنج، برای هرگونه نظریه‌پردازی درباره سیستم‌های انسانی، حائز اهمیت فراوان است. این بخش با پژوهش در نظریه توسعه و رشد برخه‌ای[۱۵] در سیستمهای پویا، چگونگی رشد و تحول را در سیستم های طبیعی، سازواره‌ها و تشکیلات بغرنج، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهد. سیستم های انسانی، اغلب همچون سازواره‌ها و سیستم های طبیعی، تشکیلاتی سازمانمند و بغرنج با اوصاف حیاتی و خصلت های رشد و توسعه، محسوب می‌گردند. از این رو بهره‌جویی از مدلسازی در فضای برخه‌ای، می‌تواند ابزاری توانمند برای پژوهش در سیستم های انسانی و سنجه‌های کمّی درخوری برای ارزیابی پدیده‌ها و فرایندهای کیفی، فراهم نماید. لذا، ابتدا نظریه فراکتال، چگونگی ایجاد پدیده‌های فراکتالی و مفهوم ابعاد خودهمانندی در فضای برخه‌ای، معرفی می‌گردد. سپس فراکتال های تصادفی و نامنتظم، نحوه پیدایش آنها، ارتباط ابعاد برخه‌ای با فرایندهای تصادفی و توابع چگالی طیفی، مفاهیم خودهمانندی آماری و خودخویشی،[۱۶] مورد ملاحظه قرار می‌گیرد. آن گاه، توسعه و رشد فراکتالی در سیستم های سازمانمند و بغرنج، مورد بررسی قرار می‌گیرد و استفاده از آن در توضیح و تفسیر پدیده‌های دگرگونی و تحول تبیین می‌گردد.

پدیده رشد برخه‌ای[۱۷] (فراکتالی) و به کارگیری آن در گشایش رموز فرایندهای تحول و توسعه در سیستم های پویا، به عنوان دستاوردی شگرف و واپسین در معارف بشر، لبه پیشرو و برآن مرزهای پویای دانش را تشکیل می‌دهد. این واقعیت، به ویژه از آن جهت، اهمیتی مضاعف می‌یابد که اغلب، فراخنای آشوب[۱۸] و فضای هندسی تحولات آشوبناک، از ماهیت و ابعاد فراکتالی برخوردار است[۱۹]؛ و اخیراً، موضوع آشوب در سیستم های پویا. به نوبه خود، منزلت پژوهشی وسیع و رفیعی در عرصه‌های مختلف علمی احراز نموده است.[۲۰] آن گاه که فرایند توسعه، در گذر زمان مطرح باشد، نظریه آشوب، پای در عرصه تحلیل می‌نهد و هنگامی که شکل و شمایل ساختاری رشد و تحول، در فرایندهای آشوبناک، مطمح نظر قرار گیرد هندسه فراکتالی، رخ می‌نماید؛ و این، در حقیقت، هندسه‌ای است که ساختارهای آن به آشوب، نظم می‌بخشد.[۲۱] به عبارتی، فضای فراکتالی، همچون «زبانی» نو، در توصیف، مدل‌سازی و تحلیل تشکل های بغرنج به کار می‌آید؛ لیکن در «زبان سنتی» که بر فضای اقلیدسی مبتنی است، اجزا و اشکال، مانند خط، دایره و کره، به طورکامل مرئی و آشنا هستند؛ حال آنکه عناصر زبان جدید، تن به مشاهده مستقیم و ظاهری نمی‌سپارند. این زبان نوپا، عموماً متشکل از الگوریتم هایی است که توسط رایانه‌ها، به اشکال،ساختارها و شمایل منتظم تبدیل می‌شوند؛ و از آنجا که گنجینه وسیعی از الگوریتم ها و روش های محاسباتی را دربرمی‌گیرد، از گنجایش لازم برای دراختیار نهادن ابزار تحلیلی توانمند برخوردار است.[۲۲]

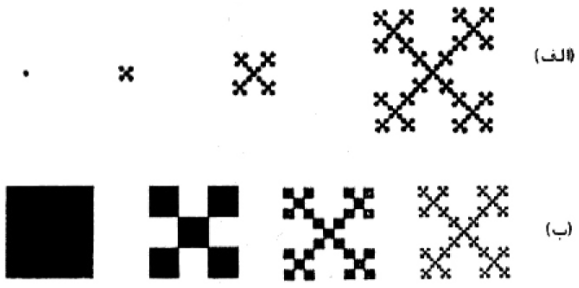
تعداد ابعاد فضا، در هندسه اقلیدسی، همواره عددی صحیح و غیراعشاری است؛ اما در فضای برخه‌ای یا فراکتالی می‌تواند عددی ناصحیح و اعشاری باشد.[۲۳] مطالعه پدیده‌های برخوردار از فضای ابعادی برخه‌مند، در سالهای اخیر، با اقبال شایان توجهی مواجه بوده و عرصه‌های گوناگونی از فرایندهای فیزیکی، فنی و زیستی را دربرگرفته است. بویژه، بسیاری از فرایندها و موجودات طبیعی، از خواص لازم برای توصیف و مدل‌بندی در فضای فراکتالی برخوردارند مانند درختان، کوه‌ها، ابرها، خوشه‌ها، کهکشان ها، توده‌های میکروسکوپی، توده‌های شن، کناره‌ها و ساحل‌ها.هم چنین در مواردی، نظریه فراکتال ها برای تبیین و توصیف پدیده رشد، به کار گرفته شده است.[۲۴] در روانشناسی و علوم رفتاری هم کوشش هایی برای بهره‌گیری از نظریه فراکتال، در تدوین مدل های کمی رشد و توسعه به عمل آمده است.[۲۵] به این ترتیب، در سیستم های سازمانی و مدیریتی و پژوهش های مرتبط با آن نیز، نظریه فراکتال می‌تواند به کار آید؛ به ویژه آنکه با توجه به وجود ساختارهای اتلافی،[۲۶] پیدایش آشوب در این گونه سیستم ها، امری محقق است؛ و چنانچه پیش از این گفته شد، فضای پیدایش آشوب می‌تواند از ابعادی برخه‌مند برخوردار باشد. بنابراین، ابتدا، می‌بایست نظریه فراکتال و فضای برخه‌ای، و مفاهیم مرتبط با آن را از نظر گذرانید.

## نظریه فراکتال ها و ارتباط آن با هندسه اشکال

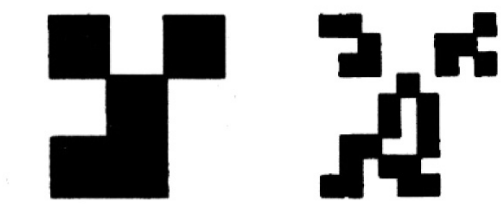
برای آشنایی با نظریه فراکتال، مناسب است که به فرایند تکرر (پویه‌مندی)[۲۷] در فضا، پرداخت. تکرّر، فرایندی است که چونان سیستمی، برونداد خود را بازخور می‌نماید و آن را به مثابه درونداد تحویل می‌گیرد تا برونداد جدید، پس دهد.[۲۸] برای مشاهده روند هندسی کارکرد چنین رابطه‌ای، و برای مثال ساده، می‌توان پاره‌خطی را به طول دلخواه درنظر گرفت و آن را به سه قسمت مساوی تقسیم نمود؛ قسمت میانی را برداشت و دو انتهای قسمت خالی باقیمانده را با دو قسمت که طول هر کدام یک سوم پاره خط اولیه است، مانند یک مثلث متساوی‌الاضلاع، به هم پیوند زد. آن گاه، می‌توان این فرایند (تابع) را به صورت پیاپی، تکرار نمود (تقسیم هر پاره‌خط به سه قسمت مساوی، برداشتن قسمت میانی، و پیوند دو انتهای قسمت خالی توسط دوپاره‌خط که طول هر کدام یک سوم پاره‌خط تقسیم شده است). همین فرایند را می‌توان به این طریق نیز تکرار کرد که هربار، روی قسمت میانی، مربعی بنا نهاد؛ در این صورت، پس از بارها تکرار، تصویری حاصل می‌گردد که در پایین شکل زیر نمایش داده شده است. اگر به جای آنکه پاره خط اولیه به سه قسمت مساوی تقسیم شود، به چهار پاره خط مساوی تقسیم و روی هر یک از دو قسمت میانی، مربعی در دو جهت معکوس بنا شود و دو پاره‌خط میانی برداشته و آن گاه. فرایندبه عینه و مکرر، تکرار شود. تصویر وسط در شکل زیر نتیجه می‌گردد.




هر یک از فرایندهای فوق نشانگر آن است که چگونه قاعده‌ای بسیار ساده، با تکرار می‌تواند به تصاویری بغرنج با خواصی غیرمعمولی، منجر شود. در هر شکل، مشابهت و همانندی بین قطعات متعدد تشکیل دهنده آن شکل و نیز کل شکل، جالب توجه است؛ هر قطعه یا هر جزء و نیز در مجموعه آنها، همشکل و از گونه یکدیگرند؛ و در صورت بزرگ‌نمایی، هر قطعه می‌تواند کل شکل را وانمایاند. این خاصیت به «خودهمانندی» (خودگونگی[۲۹]) موسوم است؛ خودهمانندی یا خودگونگی، خاصیتی را بیان می‌دارد که طبق آن، زیرمجموعه‌ها، در صورت درشت‌نمایی (وبرای مثال قرار گرفتن در زیر ذره‌بین یا دستگاه ریزبین)، مشابه، همسان و همگون با یکدیگر و نیز با کل مجموعه، جلوه‌گر می‌شوند. این خاصیت، از ویژگی های هندسه برخه‌ای (فراکتالی) است و برخه‌مندان (فراکتال‌ها) را از اشکال هندسه سنتی (اقلیدسی) متمایز می‌نماید؛ زیرا در فضای اقلیدسی، عموماً بزرگ‌نمایی می‌تواند موجب هموارنمونی بیشتری گردد. به این لحاظ، شکل های فراکتالی، با تغییر مقیاس، پایا و ناوردا تلقی می‌گردند. وانگهی، در هر بار تکرار الگوریتم ها، شکل فراکتالی ازدیاد طول می‌یابد و در حدّ (بی‌نهایت تکرر و پویه‌گری)، منحنی حاصل، با طول نامحدود (بی‌نهایت)، در گستره‌ای محدود، انباشته می‌شود؛ بدون آنکه این منحنی، خود را قطع کند.[۳۰] موضوع خودهمانندی یا خودگونگی که همانا پایایی در مقیاس را بیان می‌دارد، از مفاهیم بنیادی در هندسه فراکتالی است و با مفهوم ابعاد فضا، ارتباطی تنگاتنگ دارد.[۳۱] آنچه تاکنون در ارتباط با خودهمانندی ملاحظه گردید، جنبه متیقن (دیترمینیستیک)[۳۲] دارد و به عبارت دیگر، با به کارگیری روش های معین، می‌توان طرح های فراکتالی را به دست آورد. در مثالی دیگر، فراکتال های نشان داده شده در شکل زیر را درنظر بگیریم. در هر دو مورد (تصاویر الف و ب) هر قطعه جایگزین شونده، متشکل از ۵ عنصر است).




اکنون شکل بعدی را درنظر بگیریم، ابعاد فراکتالی این طرح نیز، همچون شکل قبل (ب)، ۱/۴۶۵ است؛ زیرا باز هم هر قطعه جایگزین، از پنج عنصر که با نسبت ۱/۳ کوچکتر شده‌اند، تشکیل گردیده است.



بنابراین اگرچه طرح فراکتالی شکل قبل با طرح موجود در شکل قبل‌تر (ب)، ظاهری متفاوت دارد، ولی بعد فراکتالی هردو یکسان (۱/۴۶۵) است. این قبیل طرح های برخه‌ای، فراکتالی تصادفی یا خودهمانندی آماری (خودگونگی آماری یا تصادفی) نامیده می‌شود زیرا شباهت، دقیق نیست و جنبه آماری یا تصادفی دارد. در این موارد، وصف «ناوردایی مقیاسی»[۳۳] نیز مصطلح است که اغلب به مفهوم خودهمانندی آماری به کار می‌رود. به هرحال، باید توجه داشت که آخرین شکلی که دیدیم، یکی از ساده‌ترین انواع خودهمانندی های آماری را نشان می‌دهد؛برای مثال جای مربع های حذف شده، تنها موردی نیست که می‌تواند تصادفی رخ دهد؛ بلکه تعداد مربع ها و حتی نسبت اندازهٔ ابعاد نیز می‌تواند، حول مقداری میانگین، تغییر نماید. به این ترتیب، برخلاف طرح های فراکتالی متیقّن که طی پویش های معین حاصل می‌گردد، تشخیص خودهمانندی آماری برای فراکتال های تصادفی و پدیده‌های نامنظم به سادگی امکان‌پذیر نیست و مستلزم به کارگیری روش های خاص است.[۳۴]

## پدیده‌های فراکتالی تصادفی و نامنتظم

گام های تصادفی[۳۵] که حرکت برونی[۳۶] یا فرایند وینر[۳۷] نامیده می‌شود در رشته‌های مختلف علوم، کاربرد فراوان دارد. حرکت برونی خرد یا گامک هایی تصادفی، الگوی ریاضی بسیار مناسبی برای مدل سازی فراکتال های تصادفی و برخه‌مندان نامنتظم در اختیار می‌گذارد و به این طریق بسیاری از پدیده‌های فراکتالی موجود در طبیعت (مانند کوه ها، ابرها، سواحل و...)، مدل‌بندی و شبیه‌سازی می‌شوند.[۳۸] درمورد پدیده‌های فراکتالی تصادفی و نامنتظم، موضوع خودهمانندی، با آنچه که پیش تر (به عنوان خودهمانندی دقیق یا آماری) مطرح گردید، می‌تواند متفاوت باشد. در خاصیت خودهمانندی، در اثر درشت‌نمایی، شکل ها (به طور دقیق یا آماری) تکرار می‌شوند؛ حال آنکه، در فراکتال های تصادفی و نامنتظم، تکرار آماری فقط هنگامی می‌تواند امکان‌پذیر گردد، که درشت‌نمایی در ابعاد مختلف، به اندازه‌های متفاوت انجام گیرد. بنابراین، خودهمانندی عبارت است از ناوردایی خواص هندسی درنتیجه تغییرات همان در مقیاس، در حالی که خودخویشی یا خودخویشاوندی، ناوردایی مقیاسی را فقط آن گاه محفوظ می‌دارد و بروز می‌دهد که تغییرات مقیاس به عنوان تابعی از بعد یا جهت (مختصات) صورت پذیرد.[۳۹] آنچه ملاحظه گردید، درنهایت مبین آن است که در پدیده‌های فراکتالی، اجزای تشکیل دهنده، هر یک مشابه یکدیگر و مشابه کل پدیده هستند. در پدیده‌های متیقن، این خاصیت به خودهمانندی موسوم است. چنانچه تشابهات موردنظر، در برخی نقاط، به طور برجسته گریخته، پراکندگی های تصادفی بروز دهند (پدیده‌های تصادفی)، خودهمانندی آماری، مطرح می‌گردد. وانگهی، اگر بعضی اجزای پدیده، دارای اعوجاج، اریب یا کژی باشند، و به عبارت دیگر، در جهات مختلف به نسبت های متفاوت، تغییرنشان دهند، خاصیت خودخویشی (خودخویشاوندی) بارز می‌شود.[۴۰]

## توسعه و رشد فراکتالی

هر فرایند یا پدیده‌ای که در گذر زمان، دگرگونی و تحول حاصل نماید، سیستمی پویا تشکیل می‌دهد؛ رشد و توسعه، به عنوان خصلتی عمومی و بارز، از اهم این تغییر و تبدیلات محسوب می‌گردد و دستکم در دورانی از تحولات سیستم های پویا جلوه‌گر می‌شود و اغلب تحت تأثیر فراگردهای بازخوران مثبت رخ می‌نماید. پدیدارهای فراکتالی موجود در طبیعت نیز، عموماً، محصول فرایندهای رشد و توسعه هستند و به طوراختصاصی، روشی ویژه تحت عنوان سیستم های «ال»[۴۱] یا سیستم های «لیندنمایر»[۴۲] برای تبیین و توصیف پدیده‌های توسعه و رشد طبیعی، تخصیص یافته است.[۴۳] در این روش، برای تبیین توسعه فراکتالی در گذر زمان، دو شیوه مدل سازی، یکی الگوهای فرسایشی، برای پدیده‌های فراکتالی تحلیل رونده (مانند کوه ها)، و دیگری الگوهای تکاملی، برای پدیدارهای فراکتالی گسترش یابنده (مانند گیاهان و درختان)، به کار می‌رود. به هرحال، بین فرایند رشد و توسعه از یک سو و شکل و شمایل از دیگرسو، همواره ارتباطی قوی وجود دارد و نرخ رشد در این ارتباط تعیین کننده است؛ ایجاد شکل، از نظر ریاضی، تابعی از زمان است و شکل یا سازواره، فقط پیکره‌ای فضایی نیست، بلکه به عنوان واقعه‌ای در فضا ـ زمان، قابل تلقی است.[۴۴] الگوی سیستم «ال» که به سیستم «بازنوشت موازی»[۴۵] نیز موسوم است، اساساً بر این نظریه استوار است که توسعه یک سازواره می‌تواند به عنوان اجرای (مکرر) یک برنامه توسعه موجود در هسته اولیه (تخمک بارور شده) نگریسته شود و سازواره توسعه یابنده، مجموعه‌ای پویا از خودکاره‌های متناهی را تشکیل می‌دهد که به طرز مناسب برنامه‌ریزی شده‌اند...

هندسه فراکتال هندسه کل عالم ماده است یعنی هندسه ای است که اعضای موجودات زنده، موجودات تک سلولی و حتی موجودات پیچیده‌ای مثل ما از این هندسه تبعیت می‌کنند تا موجودات غیرزنده... حتی به قول فیلسوفان جماد هم از این فلسفه تبعیت می‌کنند، یعنی این ساختار مولکولی‌ها و اتم را نیز دربرمی‌گیرد. و این شکل ها را عموماً فراکتالی می‌نامند. البته آن اجزای ساده اولیه را گرافتال می‌گویند و اگر آن گرافتال ها در خود مدام تکرار شوند،در نهایت شکل حاصل را فراکتال می‌گویند. برحسب تحقیقات انجام شده برروی هندسه نقوش اسلامی، هندسه اسلیمی‌ها، خطایی‌ها و گره‌های هندسی، بر ما اثبات شد که دقیقاً انطباق دارند به هندسه فراکتالی... نکته جالب در اینجا، این مورد است که چیزی را که علم در قرن بیست و یکم به طور محاسباتی بر آن اشراف پیدا کرده است، هنرمندان ایرانی از راه حس، هزار سال پیش، به آن دست یافتند و این مورد در موسیقی و معماری ایرانی نیز مشهود است..در حال حاضر در تمام رشته‌های فیزیک، مانند فیزیک الکتریسیته و امواج، بحث فراکتال ریشه دوانیده است. هم چنین در فیزیک نوین بخشی پایه‌گذاری شده است به نام تئوری آشوب. این تئوری مبنای بیشتر محاسبات ابروبادهای سنتی ـ دویدن چند رنگ درهم ـ و آن ردهای لطیف و منحنی که با یک معادله درهم تکرار می‌شوند و یک شکل کاملاً فراکتالی را به وجود می‌آورد، اثبات می‌کند..

ما در فراکتال‌گرایی به یک مبنای فلسفی و جهان‌بینی می‌رسیم و جهان‌بینی فراکتالی، یکی شدن و وحدت است، وحدت علوم، هنرها و وجود. آنچه هست همه یک چیز است و پرتوهای مختلف از یک چیز و یک قاعده کلی بر آنها حاکم است. هندسه فراکتال این را اثبات می‌کند که عدد بی‌نهایت که بشر این همه به دنبال آن است، عدد

یک است. احدیت در عین بی‌نهایت بودن و کثیربودن، در عین حال وحدت است. هندسه اقلیدسی زمانی بر نگرش بشر حاکم بود. ایده‌های مسطح دیدن و منظم دیدن، مرتفع دیدن، جهان خطی و جهان عددی فیثاغورس که خیلی منظم و مرتب بود توسط بزرگانی مثل ریمن و لواچوفسکی در هندسه نااقلیدسی تغییرساختار پیدا و نگاه بشر به جهان شکل دیگری پیدا کرد؛ یک شکل غیرمسطح، غیرمنظم، و فراکتالیسم هم در حقیقت، دیدگاه همین بی‌نظمی‌ها در عالم است.همان طور که پست مدرنیسم درحقیقت ساختارشکنی مدرنیسم است و خروج انسان از سیستم، نظم و حتی عقلانیت را اشاعه می‌دهد، فراکتالیسم در حقیقت خروج از دیدگاه‌های منظم، مشخص و معین است. درواقع هنر نگارگری که درحقیقت نگاره گری است، تصور و دید ما را نسبت به جهان خارج بیان می‌کند، نه جهان خارج را به ما. یعنی در حقیقت نقاش نگاره‌گر، خودش را بیان می‌کند و از برداشت، دید و میل خود نسبت به جهان خارج می‌گوید.. انسان با جهان‌های خودش زندگی می‌کند، نه با عینیت‌های خارجی. به قول میت گن اشتین[۴۶] نگاه ما، اشیاء را آن گونه که می‌خواهیم به ما می‌نمایاند. برای مثال اگر چهار خط را در تابلویی بکشیم، آن خطوط درنظر بیننده به چیزهای متفاوتی تعبیر می‌شود. عده‌ای آن را سطح، فرش، تابلو و یا مستطیل تصور می‌کنند. عده‌ای در همان لحظه ممکن است به یاد پاکن‌شان بیافتند که جلوی میزشان است... همین دیدگاه راجع به کثرت وحدت عالم مطرح است. یک دیدگاه قوی فلسفی هست که می‌گوید کثرات عالم، خیال و وهم است و آنچه حاکم است، وحدت می‌باشد. ایده‌ای که مطرح شد باز بیانگر این است که تصور ما از جهان خارج، ذهنی است.

**بررسی وجوه مشابهت هندسه فراکتالی با نقوش اسلامی:**

همان طور که می‌دانید نقوش اسلامی دارای قوه تجریدی یا آبستراکسیون است. «بورکهارت» در کتاب هنر مقدس بر این مضمون تأکید داشته و در توصیف علت آن به ذکر این نکته می‌پردازد که: «هنرمند مسلمان وجه ظاهر امور و موضوعات را در شأن حضور و ظهور امر قدسی نمی‌داند».[۴۷] اشاره فوق به علت تجرید نزد هنرمندان مسلمان به تعبیری صحت دارد. زیرا آنها درگیر محادثه با وجه قدسی اشیاء که نسبت به عالم فانی بیگانه است بوده و به هم سخنی و دیدار با عیون ثابته مشهودات به اعتبار «ماشممتُ رایحه من الموجود» می‌پرداخته‌اند. این وجوه از موجودیت خود بی‌خبر افتاده و در نسبت عدمی با عالم ناسوت به تمامی رو به سمت مصدر اسماء الهیه گردانیده و بنابراین هنرمند در تلاش برای از پرده برون انداختن آنها ناگزیر است تا به عالم مجرد آنها قدم بگذارد. قصد داریم تا نشان بدهیم این تجرید قابل انطباق با آن قانون اساسی است که موجود را از عدم و نیستی فرا می‌آورد. باز هم از بورکهارت مثال می‌آوریم: «در اینجا باید وجه تمایز میان هنر انتزاعی اسلام و «هنر انتزاعی» جدید را خاطرنشان کنیم. هنرمندان جدید در «انتزاع» جوابی بی‌واسطه‌تر و سیال‌تر (و در عین حال سهل و ممتنع‌تر) و فردی‌تر برای تکانه‌های غیرعقلانی که از ناخودآگاه برمی‌خیزد، می‌یابند. از لحاظ هنرمند مسلمان برعکس، هنر انتزاعی بیانگر قانونی است و به مستقیم‌ترین وجه، وحدت در کثرت را نمودار می‌سازد».[۴۸] قصد دارم «قانون» در عبارت فوق را با قوانین فراکتال به خصوص قانون ساده قابل تکثر آن در تناظر و تشابه فرض کنم. برای شرح بیشتر، اوصاف هندسه فراکتالی را با آثار هنری و نوآوری های هنرمندان مسلمان مطابقت می‌دهیم:

ـ هندسه نقوش اسلامی خود مشابه است. برای مثال در مقرنس‌های مساجد، تمامی شمای مقرنس‌کاری را می‌توان به نحوی در تکه‌های متشکله آن بازجست.

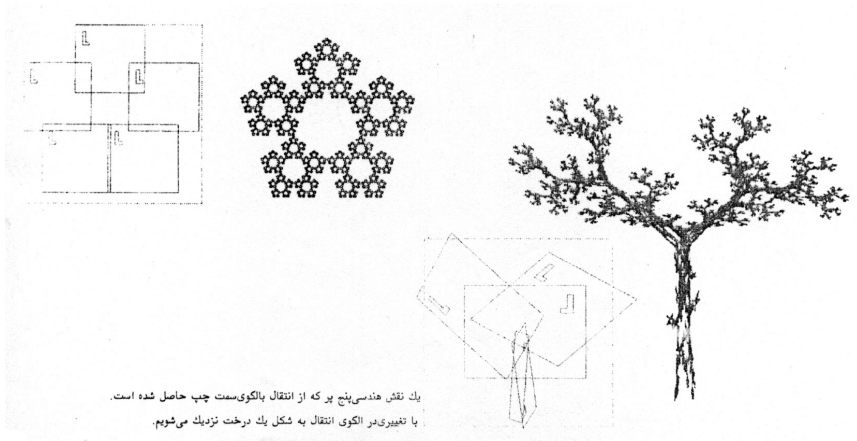
ـ نقوش اسلامی دارای اجزای بی‌نهایت نیست ولی تلاش هنرمند تا حد امکان در پرداختن به ریزه‌کاری‌ها و اجزای بیشتر و بیشتر بوده و اگرچه این وجه به لحاظ محدودیت‌های مادی دقیقاً مشابه هندسه فراکتالی نیست ولی تعلق به اجزاء و ریزه‌کاری‌ها را درنوآوری های هنرمندان مسلمان توجیه می‌کند.

ـ نقوش اسلامی دارای Attractor می‌باشند و درواقع (و با توجه به توضیح فوق) هرگاه هنرمند به شکل نهایی شئ مورد طراحی نزدیک می‌شود، دست از ریزه‌کاری‌های بیشتر برمی‌دارد ولی بصر بیننده را با تمهیداتی به سمت القای اجزای بی‌نهایت در اثر خود هدایت می‌کند.

ـ ضمن اینکه در نقوش اسلامی Unit-Cell هایی (مانند فراکتال‌ها) وجود دارد که هنرمند با تکرار آنها در کنار هم به طور مدام به خود و به ما تذکر می دهد.

ـ هندسه اسلامی نیز مانند هندسه فراکتال از یک Lnitiator[۴۹] و یک قانون تکاثر برخوردار است.

ـ در بخش اول این بخش به اهمیت دوبعدی بودن نقوش نزد هنر اسلامی اشاره کردیم. برای اثبات مشابهت میان آنها کافی است به شکل زیر دقت شود.



یک نقش هندسی‌پنج پر که از انتقال بالگوی‌سمت چپ حاصل شده است.
با تغییری‌در الگوی انتقال به شکل یک درخت نزدیک می‌شویم.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نقش دوبعدی بالایی مشابه نقوش اسلامی است (کافی است آن را در کنار هم تکثیر کنید تا به نقش روی گنبد حضرت شاه نعمت‌الله ولی برسید) که با تغییر کوچکی در Projection Point و سطوح تکثری آن به شکل یک درخت خواهیم رسید. پس می‌توان گفت که هنرمند مسلمان اگرچه تجرید را به ما می‌نمایاند ولی هیولا و ماده خام اثر خود را از عالم ناسوت برگرفته و آن را به عوامل قدسی رسوخ می‌دهد.

## پایان و نتیجه

توجه به نزدیکی هنر مقدس اسلامی به نحله‌های جدید علمی می‌تواند محرک مناسبی برای حوزه‌های جدید تحقیق باشد و این از دو لحاظ قابل بررسی است:

۱ـ تفهیم عمیق‌تر و رسوخ به معانی تحقیقات حاضر: برای مثال باز از بورکهارت مثال می‌آوریم: «طاقگان حیاطی در قصر الحمراء چنین می‌نماید که از ارتعاشات نور، تنیده شده‌اند. بسان نوری بلورین‌اند و حتی می‌توان گفت که جوهر باطنی شان سنگ نیست، بلکه نور الهی است، عقل خلاقه است».[۵۰] مشاهده می‌کنید که فهم متن فوق برای کسی که با Gasket ها[۵۱] در هندسه فراکتالی آشنا باشد، بسیار ملموس‌تر خواهد بود.

۲ـ نقد مواردی که بدون چنین ارجاعاتی بدون اثبات یا رد باقی خواهد ماند:

برای ایراد مثالی در این باب مجدد همان کتاب را خواهیم خواند: «به یقین خاطره‌هایی از اثاثیه چادرنشین که مشتمل بر قالی و چادر بود در مقرنس‌های طاق ها و قوس‌ها باقی مانده است».[۵۲]

توجه می‌کنید که وی با چه اطمینانی از تأثیر چنین خاطره‌هایی و نسبت دادن مقرنس‌هابه‌فرهنگ‌چادرنشینی سخن می‌راند. به یقین با توجه به اشکال زیر و مقایسه میان مقرنس‌ها و هندسه رشد سلول‌ها در انسان و گیاهان به متن فوق شک خواهیم کرد.

در پایان نمونه‌ی دیگری از مشابهت‌های میان نقوش (به خصوص نقوش اسلامی) و منتجات هندسه فراکتالی در اشکال ارائه شده است. بدیهی است که متن حاضر به دلیل جدید بودن جای بحث فراوانی را برای خود گشوده نگاه می‌دارد و نگارنده تنها امید دارد که این بحث بتواند محرک نقد و تجربه‌هایی تازه‌تر در این زمینه شود.

## پی‌نوشت‌ها:

1- J.Pollock.

۲ـ نبوغ نظم در آشوب، روزنامه همشهری، سه‌شنبه ۱ بهمن ۸۱.

3-smithsonian magazine,nov 1998.

4- Fractal Geometry

5- Fractals.

6- Benoit Mandelbort.

7- Fraction.

8- Witten and Sander

9- diffusion Limited aggregation.

10-Zoom.

11 - Fraction.

12- Refraction.

۱۳ـ برای درک بیشتر موضوع می‌توانید مراجعه کنید به سایت:
http://Life.csu.edu.au/Complex/tutorials3.html.

14- Julia set.

۱۵ـ فراکتالی.

۱۶ـ خودخویشاوندی.

۱۷ـ واژه Fractal را «برخال» نیز گفته‌اند.

18 - Chaos

19-Peitgen, Jurgens and saupe, op.cit.; A.Lasota and M.C.Macky,chaose, Fractals and Noise; stochastic Aspects of Dynamics, Springer-Verlay, 1994.

20- Idbid,; M.Schroeder, Fractal, Chaos and Power Laws, Freeman Publishers, 1991, R.H.Abraham and C.D.shaw, Dynamics, The Geometry of Behaviour, Addison-Wesley,1992; M.Bransley, Fractals Everywhere, Academic Press, 1998; A.J.Crilly, R.A.Devany Chaos, Fractals and Dynamics, Addison-Wesley, 1990.

21- Peitgen,, et al Op.cit; J.Belair and S.Dubuc, Fractal Geometry and Analysis, Kluwer Publisher, 1991.

22- Ibid.

23- B.B.Mandelbrot, "Self-Affine Fractals and Fractal Dimensions", Phyysica Scripta, 32 (1985), 260; and Fractals: Form, Chance and Dimen--pp.257 sion, Freeman and Co.,1997

24- A.Aharony, "Fractal Growth", in A.Bunde, and S.Havlin, (eds.), Fractals and Disordered Systems, Spreinger-Verlag, 1991; Mandelbrot and Evertsz,. Op.Cit.; I.Procaccia, and R.Zeitak, "Shape of Fractal Growth Patterns: Exactly Solvable Models and Stability Consideration", Phys.Rev.Lett.bo, (1988), pp.2511-2519.

25- L.B.Smith and E.Thelen, eds., A Dynamic Systems Approach to Development: Applications, MIT Press, 1993; P.Van Geert, (eds), Mind and Motion, MIT Press, 1994; Schroeder, op.cit.

26- Dissipative Structures.

27- Iteration.

28- Peitgen, et al. (1993), op.cit.

29- Self-Similarity.

30- Ibid.; Hutchinson, (1981), op.cit.

31- G.Cherbist, Fractals, Non-integral Dimensions and Applications, John Wiley & Sons, 1991.

32- Diterministic.

33- Scale Invariance.

34- R.Jullien and R.Botet "Aggregation and Aggregates", World Scaling Phenomena in Disordered Systems, Nato ASI Series B133, Plenum Press, 1986.

35- Random Walk

36- Brownian Motion.

37- Wiener Process.

38- Ibid.; R.F.Voss (1985). "Random Fractal Forgeries", in Earnshaw, ed., Fundamental Algorithms For Computer Graphics, Springer Verlag, 1984, pp.805-835; Pynn and Skjeltrop, op.cit.

39- L.Pietronero and Tosatti, Fractals in Physics, Elsevier, 1986.

40- Peitgen, et al.(1993), op.cit.

41- L - Systems.

42- Aristid Lindenmayer (1925-1989).

43- A.Lindenmayer, "Mathematical Models For Cellular Interaction in Development", Journal of Theoretical Biology, 18 (1968) pp.280-315.

44- D'Arey Thompson (1942), On Growth and Form, Cambridge University Press, 1942; Lindenmayere, (1968), op.cit.

45- Parallel Rewriting System.

46 - Mitgen Echtine.

۴۷ـ «بورکهارت، تیتوس»، هنر مقدس، ترجمه «جلال ستاری»، انتشارات سروش، چاپ دوم، ص ۱۳۱ به بعد.

۴۸- همان

۴۹ـ واحد آغازین.

۵۰ـ همان، صفحه ۱۳۶.

۵۱ـ الگوی Sierpinski Gasket، یکی از معروفترین الگوها در هندسه فراکتالی است:

همان طور که مشاهده می‌شود. ما از یک مثلث ساده، یک چهارم آن را برمی‌داریم و سپس برای هر سه مثلث سیاه باقی مانده همین کار را ادامه می‌دهیم الی آخر. پس از تکرار تعداد معینی از این مراحل، به شکلی می‌رسیم با حدی کافی از جزئیات به طوری که با ادامه مراحل فوق، تغییری بارز در شکل کلی آن ظهور نخواهد کرد و درواقع شئ به غایت خود جذب خواهد شد.

52- Self-Similarity

**منابع و مآخذ:**


۱ـ مباحث فراکتال ها، مفهوم هندسه فراکتالی و آرایش تکرارشونده برگرفته از سایت

www.riazi-va-zibaea.persianblog.com

۲ـ بحث کاربرد فراکتال در علوم زمین برگرفته شده از سایت

www.ngdir.com/papers/ppapersdetail.asp?pid=1608

۳ـ مباحث برخال واژه فارسی فراکتال و الگوهای رویش برخالی برگرفته شده از سایت ویکی پدیا، دایره المعارف آزاد.

۴ـ فراکتال، ریاضیات، رویاها... برگرفته از ماهنامه شبکه،شماره نهم، صفحهٔ ۷۰ الی ۷۳.

۵ـ نظریه فراکتال در سیستم های پویا... برگرفته از مجله اطلاعات سیاسی ـ اقتصادی، شماره ۱۷۲ـ۱۷۱، صفحه ۱۸۴ تا ۱۹۵.

۶ـ فراکتال در علوم کشاورزی... برگرفته از مجله نامه فرهنگستان علوم، شماره ۱۷، س ۶، صفحهٔ ۱۴۷ الی ۱۶۱. نوشته علیرضا سپاس‌خواه، عضو پیوسته فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران.

۷ـ فراکتال در نقوش اسلامی... برگرفته از نشریه سایه طوبی، فرهنگستان هنر جمهوری اسلامی ایران، فروغ اردلان، مشابهت صوری نقوش اسلامی و هندسه فراکتالی.

ftp://rtfm.mit.edu/pub/usenet/comp.compression

http://www.cnam.fr/fractals/mandel.html

http://www.vis.colostate.edu/~user1209/fractals/explorer/Christias Mandelbrot Explorer

http://reality.sgi.com/employess/rck/hydra/

http://www.mindspring.com/~chroma/mandelbrot.html

http://www.sunlabs.com/~shirriff/java/

ftp://ftp.ira.uka.de/pub/graphics/fractals

(OS/2) http://oak.oakIand.edu/pub/os2/graphics/

(Unix) http://fractal.mta.ca/spanky/programs/unix/xfract304.tgz

(Amiga) http://spanky.rium.ca/pub/fractals/programs/AMIGA/

(Lyapunov Fractals) http:/itsnet.com/~bug/fractals/Lyapunovia.html